Partie A : Approche expérimentale

1. La population semble maximale pour $t \approx 1$ heure.
2. La population dépasse 1 million de bactéries par mL pour $t \in [0{,}3\,;\,2{,}5]$ environ.
3. La courbe est d'abord convexe puis concave : il y a un changement de courbure vers $t \approx 2$.

Partie B : Modèle mathématique

1. Résolution de (E') : $y' + y = 0$:

$$y' = -y \Rightarrow y(t) = Ce^{-t}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

2. On pose $u(t) = ate^{-t}$.

$$u'(t) = ae^{-t} - ate^{-t} = a(1-t)e^{-t}.$$

Alors :

$$u'(t) + u(t) = a(1-t)e^{-t} + ate^{-t} = ae^{-t}.$$

On veut $u'(t) + u(t) = 5e^{-t}$, donc $a = 5$.

3. Les solutions de (E) sont :

$$y(t) = Ce^{-t} + 5te^{-t}.$$

4. Condition initiale : $f(0) = 0$

$$f(0) = C + 0 = 0 \Rightarrow C = 0.$$

Donc :

$$f(t) = 5te^{-t}.$$

Partie C : Exploitation

1.

$$\lim_{t\to+\infty} 5te^{-t} = 0.$$

Interprétation : la population finit par disparaître (épuisement du milieu).

2.

$$f'(t) = 5e^{-t} - 5te^{-t} = 5(1-t)e^{-t}.$$

Signe de $f'(t)$:

- $f'(t) > 0$ si $t < 1$
- $f'(t) = 0$ si $t = 1$

- $f'(t) < 0$ si $t > 1$

Tableau de variation :

t	0	1	$+\infty$
$f'(t)$	$+$	0	$-$
$f(t)$	0	$\nearrow$ $\frac{5}{e}$	$\searrow$ 0

Maximum : $\dfrac{5}{e} \approx 1{,}84$, atteint pour $t = 1$.

3. Résolution de $5te^{-t} = 1$.

On trouve (numériquement) :

$$t_1 \approx 0{,}26 \quad \text{et} \quad t_2 \approx 2{,}54.$$

4. La population dépasse 1 million pour :

$$t \in [0{,}26\,;\,2{,}54].$$

Durée :

$$2{,}54 - 0{,}26 = 2{,}28 \text{ heures}.$$

Partie D : Population moyenne

1.

$$P_m = \int_0^1 5te^{-t}dt.$$

Intégration par parties :

$$\int te^{-t}dt = -te^{-t} - e^{-t}.$$

Donc :

$$P_m = 5[-te^{-t} - e^{-t}]_0^1 = 5\left(-\frac{2}{e} + 1\right).$$

2.

$$P_m = 5\left(1 - \frac{2}{e}\right) \approx 1{,}32.$$

3. Interprétation : en moyenne, durant la première heure, la population est d'environ 1,32 million de bactéries par mL.